Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg - Mathematisches Institut
Seminar zur Numerische Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Rannacher, Rolf; Dr. Richter, Thomas
Betreuer: Schmich, Michael; Wollner, Winnifried
Referenten: Ying Gu
Heidelberg, den 9.04.2009

Milnes Device

1 Vorbereiten

$$y' = f(x, y), \qquad x \in (a, b), \quad y(a) = \eta \tag{AWP}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \qquad \alpha_k = 1, \quad \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \tag{LMM}$$

Satz 1: Sei $f(x, y)$ stetig und $\forall (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y)|a \leq x \leq b, -\infty \leq \infty\}$ Sei $L \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|f(x, y) - f(x, y^*)\| \geq L \|y - y^*\| \qquad \forall (x, y), (x, y^*) \in \mathcal{D}$$

Dann existiert eine Lösung für das AWP. Diese Lösung y(x) ist sogar stetig und differenzierbar.

Definition 1: Unter den Vorraussetzungen von Satz 1 ist das LMM konvergent zur Lösung des AWP, wenn gilt:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = x - a}} y_n = y(x_n) \qquad \forall x \in [a, b], \quad \forall y_0 = \eta$$

2 Ein Vergleich zwischen expliziter und impliziter Methode

Frage: Explizite Methode und Implizite Methode, welche besser?

Table 1

Adams-Bashforth(explicit)				
k	1	2	3	4
p	1	2	3	4
C_{p+1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$
α	-2	-1	-$\frac{6}{11}$	$-\frac{3}{10}$
Adam-Moulton(implicit)				
k	1	2	3	4
p	2	3	4	5
C_{p+1}	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$
α	$-\infty$	-6	-3	$-\frac{90}{49}$

k : Anzahl der Schritte; p : Ordnung; C_{p+1} : Fehlerkonstant; $(\alpha, 0)$: Stabilitätsintervall

Fazit: Implizite Methode besitzt sowohl kleinere Fehlerkonstant als auch größeres Stabilitätsintervall. Deshalb ist Implizite Methode besser als Explizite Methode.

3 Prädiktor-Korrektor-Methode

Gleichung der Allgemeine Lineare Mehrschrittmethode(LMM)

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \tag{1}$$

wobei $y_{n+j}, f_{n+j}, j = 0, 1, ..., k-1$, sind bekannt.

Die Gleichung ist im Allgemein nicht linear. Sie hat eine eindeutige Lösung für y_{n+k}, man kann sie durch die folgende Iteration beliebig nähren

$$y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \qquad s = 0, 1, ... \tag{2}$$

wobei $y_{n+k}^{[0]}$ ist beliebig,zwar unter folgende Bedingung

$$h < \frac{1}{L|\beta_k|} \tag{3}$$

Obwohl die Startwert $y_{n+k}^{[0]}$ beliebig sein kann, sollen wir eine möglich genaue Startwerte nehmen, damit wir wenig mal iterieren müssen. Da die Iterationen sind Zeit aufwendig. Deshalb können wir die Explizit-Methode anwenden, um die Startwerte $y_{n+k}^{[0]}$ zu gewinnen. Die Explizit-Methode heißt hier <u>Prädiktor</u>, und die implizit-Methode heißt <u>Korrektor</u>.

Wir können das Verfahren in zwei verschiedenen Wege durchführen:

(1) Setzen wir eine Fehlerschrank ϵ. Wenn $|y_{n+k}^{[s+1]} - y_{n+k}^{[s]}| < \epsilon$, dann akzeptieren wir die $y_{n+k}^{[s+1]}$ als die Lösung. Diese Methode heißt <u>Korrektur zur Konvergenz</u>. In dieser Methode können wir nicht vorhersagen, wie viele Schritte benötigt sind.

(2) Setzen wir eine feste Iterationsanzahl m, die wir in dem Korrektor anwenden möchten.
Hier werden wir eine standarde Notation einführen:
P: Prädictor anwenden; C: ein mal Korrektor anwenden; E: f bewerten
z.B PEC bedeutet, wir brechen zuerst $y_{n+k}^{[0]}$ vom Prädiktor(P), danach bewerten wir f_{n+k}^{0} durch $f_{n+k}^{[0]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[0]})$(C), dann brechnen wir $y_{n+k}^{[1]}$;
PECE bedeutet, danach PEC noch mal $f_{n+k}^{[1]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[1]})$ berechnen.
$P(EC)^m E$ bedeutet, nach ein mal Prädiktor anwenden, führen wir m mal E und durch, danach ein mal $f_{n+k}^{[m]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[m]})$

Wir definiere den Prädiktor mit den charakterischen Polynomen

$$\rho^*(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^* \zeta^j, \quad \alpha_k^* = 1, \quad \sigma^*(\zeta) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \zeta^j \tag{4}$$

und Korrektor mit

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j, \quad \alpha_k = 1, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j \tag{5}$$

Dann schreiben wir $P(EC)^m E$ und $P(EC)^m$ für $m = 1, 2, ...$:
$P(EC)^m E:$

$$
\begin{aligned}
y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[m]}, \\
s = 0, 1, ..., m-1 : & \\
f_{n+k}^{[s]} &= f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}), \\
y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} &= h\beta_k f_{n+k}^{(}[s]) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[m]}, \\
f_{n+k}^{[m]} &= f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[m]}),
\end{aligned} \tag{6}
$$

$P(EC)^m$:

$$
\begin{aligned}
y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[m-1]}, \\
s = 0, 1, ..., m-1 & \\
f_{n+k}^{[s]} &= f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}), \\
y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} &= h\beta_k f_{n+k}^{(}[s]) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[m-1]},
\end{aligned} \tag{7}
$$

4 der lokale Abschneidefehler von Prädiktor-Korrektor Methode: Milne's device

Definition 2: Definieren wir jetzt Linearer differenzenperator L

$$\mathcal{L}[y(x); h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y'(x + jh)] \tag{8}$$

wobei y(x) eine beliebige stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall [a,b] sei.

Taylorreihe von $\mathcal{L}[y(x); h] umden Entwicklungspunkt x:$

$$\mathcal{L}[y(x); h] = C_0 y(x) + C_1 y'(x)h + ... + C_q y^{(q)}(x)h^q + ... \tag{9}$$

setzt man $y(x + jh) := y_{n+j}$ und $y'(x + jh) := f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$ ein, so wird $\mathcal{L} = 0$. Das folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{L}$

Setzt man hingegen die echte Lösung y(x) ein, so ist natürlich im allgemeinen $\mathcal{L} \neq 0$, aber man kann fordern, das die ersten p Terme der Taylorreihe verschwinden, damit $\mathcal{L} = C_{p+1} y^{(p+1)}(x) h^{p+1} + O(h^{p+2})$ gilt.

Definition 3: Das Verfahren LMM ist von der Ordnung P, wenn in (9) gilt: $C_0 = C_1 = ... = C_p = 0, \quad C_{p+1} \neq 0$

Definition 4: $\mathcal{L}[y(x_n); h]$ heißt lokale Abschneidefehler bei x_{n+k}, wenn $y(x)$ die echte Lösung ist.

Wir definiere hier P für Prädiktor, C für Korrektor, lokale Abschneidefehler $\mathcal{L}^*$ und $\mathcal{L}$, Ordnung p^* und p, Fehlerkonstant $C^*_{p^*+1}$ und C_{p+1} von jeweils.

Nehmen wir an, dass die vorherige numerische Lösungen bei $x_{n+j}, j = 0, 1, ..., k-1$ sind exakt, und die theoretische Lösung y(x) sind genug ableitbar. Wir werden sehen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*[y(x);h] &= C^*_{p^*+1} h^{p^*+1} y^{(p^*+1)}(x) + O(h^{p^*+2}) \\ \mathcal{L}[y(x);h] &= C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x) + O(h^{p+2}) \end{aligned} \tag{10}$$

Wegen der Gleichung für Ordnung p

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \tag{11}$$

bekommen wir für Prädiktor

$$y(x_{n+k}) - y^{[0]}_{n+k} = C^*_{p^*+1} h^{p^*+1} y^{(p^*+1)}(x) + O(h^{p^*+2}) \tag{12}$$

Für Korrektor bekommen wir:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(x_{n+j}) = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) + \mathcal{L}[y(x_n);h] \tag{13}$$

und aus (6) und (7) bekommen wir:

$$y^{[s+1]}_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y^{[m]}_{n+j} = h\beta_k f^{[s]}_{n+k} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f^{[m-t]}_{n+j}, s = 0, 1, ..., m-1, \tag{14}$$

wenn es in $P(EC)^m E$ Methode ist, t = 0; wenn es in $P(EC)^m$ Methode ist, t = 1.
(13) - (14):

$$\begin{aligned} y(x_{n+k}) - y^{[s+1]}_{n+k} &= h\beta_k [f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) - f(x_{n+k}, y^{[s]}_{n+k})] + \mathcal{L}[y(x_n);h] \\ &= h\beta_k \frac{\partial f(x_{n+k}, \eta_{n+k,s})}{\partial y} [y(x_{n+k} - y^{[s]}_{n+k})] + \mathcal{L}[y(x_n);h] \\ & \quad s = 0, 1, ..., m-1, \end{aligned} \tag{15}$$

$\eta_{n+k,s}$ ist ein Wert zwischen $y^{[s]}_{n+k}$ und $y(x_{n+k})$

Fall 1: $p^* \geq p$
Setzen (12) in (15) mit $s = 0$ und nach (10)

$$y(x_{x+k}) - y^{[1]}_{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \tag{16}$$

Daraus finden wir successive mit Hilfe von (15) für $s = 1, 2, ...$

$$y(x_{x+k}) - y^{[m]}_{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \tag{17}$$

Wir sehen, wenn $p^* \geq p$ ist, für $m \geq 1$ ist der lokale Abschneidefehler von der Prädiktor-Korrektor-Methode ist allein die Ordnung vom Korrektor.

Fall 2: $p^* = p - 1$
Setzen wir (12) in (15) mit $s = 0$

$$y(x_{n+k}) - y^{[1]}_{n+k} = [\beta_k \frac{\partial f}{\partial y} C^*_p y^{(p)}(x_n) + C_{p+1} y^{(p+1)}(x_n)] h^{(p+1)} + O(h^{p+2}) \tag{18}$$

Wir sehen, bei m = 1 ist die Ordnung vom lokalen Abschneidefehler gleich von dem Korrektor. Aber sie sind nicht identisch.
Successiv bekommen wir für $m \geq 2$

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[m]} = C_{p+1}h^{p+1}(x_n) + O(h^{p+2}) \tag{19}$$

Also, die Ordnung vom lokalen Abschneidefehler für $m \geq 2$ ist wieder gleich wie vom Korrektor.

Fall 3: $p^* = p - 2$
Setzen wir (12) im (15) mit s = 0, bekommen wir

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[1]} = \beta_k \frac{\partial f}{\partial y} C_{p-1}^* h^p y^{(p-1)}(x_n) + O(h^{p+1}) \tag{20}$$

Wir sehen hier ist der lokale Abschneidefehler eine Ordnung nieriger als der Korrektor.
Analog substituieren wir (15) mit $m = 2$, bekommen wir

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[2]} = [(\beta_k \frac{\partial f}{\partial y})^2 C_{p-1}^* y^{p-1}(x_n) + C_{p+1} y^{(p+1)}(x_n)]h^{p+1} + O(p^2) \tag{21}$$

Wir sehen, der lokale Abschneiderfehler hat gleiche Ordnung wie der Korrektor, aber sie sind nicht identisch.
Weiter für $m \geq 3$

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[m]} = C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \tag{22}$$

Die Ordnung vom lokalen Abschneidefehler ist wieder gleich vom Korrektor.

Fazit:
Wenn $p^* \geq p$, die Ordnung von dem Lokalen Abschneidefehler ist gleich der Korrektor.
Wenn $p^* = p - q, 0 < q \leq p$, dann ist der Algorithmus vom lokalen Abschneidefehler ist

1. wenn $m \leq q + 1$, ist allein von dem Korrektor.
2. wenn $m = q$, ist wie von dem Korrektor, aber nicht identisch.
3. wenn $m \leq q - 1$, dann hat die Form $Kh^{p-q+m+1} + O(h^{p-q+m+2})$

Wir können sehen, der lokale Abschneidefehler bei der Korrektur zur Konvergenz ist gleich von dem Korrektor, und unabhängig von dem Prädiktor.

Von oben können wir sehen, dass $p^* \geq p$ wenig bringt. Es kostet unnötiger großen Aufwand. Aber es ist vielleicht sinnvoll, wenn wir $p^* = p - m \geq 0$ nehmen. Aber eigentlich ist es besser, wenn wir $p* = p$ nehmen. Da bei Berechnung vom lokale Abschneidefehler müssen wir nicht die hohe Ableitung von $y(x)$ berechnen. Diese Technik heißt <u>Milne's device</u>.

Nehme wir an $p* = p$, aus (17), dann

$$C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = y(x_{x+k}) - y_{n+k}^{[m]} + O(h^{p+2}) \tag{23}$$

und aus (12)

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[0]} = C_{p^*+1}^* h^{p^*+1} y^{(p^*+1)}(x) + O(h^{p^*+2}) \tag{24}$$

(24) - (23)

$$(C_{p+1}^* - C_{p+1})h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]} + O(h^{p+2}) \tag{25}$$

Danach folgt aus (25)

$$C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = \frac{C_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}}(y^{[m]}_{n+k} - y_{n+k}[0]) \tag{26}$$

Der Term $O(h^{p+2})$ ist ignoriert.

(26) ist oft benutzt, um die Genauigkeit von Prädiktor und Korrektor verbessern. Aus (26) bekommen wir leicht den geschätzten lokale Abschneidefehler vom Prädiktor, es ist

$$C^*_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = \frac{C^*_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}}(y^{[m]}_{n+k} - y^{[0]}_{n+k}) \tag{27}$$

Wir können die Gleichung (27) noch nicht benutzen, da $y^{[m]}_{n+k}$ ist bis jetzt unbekannt. Aber wir wissen

$$\begin{aligned} C^*_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) &= C^*_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_{n-1}) + O(h^{p+2}) \\ &= \frac{C^*_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}}(y^{[m]}_{n+k-1} - y^{[0]}_{n+k-1}) + O(h^{p+2}) \end{aligned} \tag{28}$$

Wegen der Gleichung (11)

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k} = C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \tag{10}$$

herausfolgt

$$\hat{y}^{[0]}_{n+k} = y^{[0]}_{n+k} + \frac{C^*_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}}(y^{[m]}_{n+k-1} - y^{[0]}_{n+k-1}) \tag{29}$$

Der Schritt heißt <u>Modifier</u>, und wir notizen ihn als M.

Aus (26) können wir auch bekommen

$$\hat{y}^{[m]}_{n+k} = y^{[m]}_{n+k} + \frac{C^*_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}}(y^{[m]}_{n+k} - y^{[0]}_{n+k}) \tag{30}$$

Die Modifiziere Schritte (29) und (30) können wir auch in Methoden $P(EC)^mE, P(EC)^m$ hinzufügen. Also notizen wir $PM(EC)^mE$ und $PM(EC)^mM$. sie können auch in Korrektur zur Konvergenz Mode hinzufügen.

Beispiel 1: Prädiktor P und Korrektor C sind von folgenden Charakteristische Polynom definiert

$$\begin{array}{lll} P: & \rho^*(\zeta) = \zeta^4 - 1; & \sigma^*(\zeta) = \frac{4}{3}(2\zeta^3 - \zeta_2 + 2\zeta) \\ C: & \rho(\zeta) = \zeta^3 - \frac{9}{8}\zeta^2 + \frac{1}{8}; & \sigma(\zeta) = \frac{3}{8}(\zeta^3 + 2\zeta^2 - \zeta) \end{array}$$

Wir wissen schon, dass P und C haben die gleiche Ordnung 4, und $C^*_5 = \frac{14}{15}$, $C_5 = -\frac{1}{90}$. Aus (26) bekommen wir

$$C^*_5h^5y^{(5)}(x_{n+k}) \approx -\frac{112}{121}(y^{[m]}_{n+k} - y^{[0]}_{n+k})$$
$$C_5h^5y^{(5)}(x_{n+k}) \approx -\frac{9}{121}(y^{[m]}_{n+k} - y^{[0]}_{n+k})$$

P(EC)E Mode:

$$
\begin{aligned}
P: &\quad y_{n+4}^{[0]} - y_n^{[1]} = \frac{4h}{3}(2f_{n+3}^{[1]} - f_{n+2}^{[1]} + 2f_{n+1}^{[1]}) \\
E: &\quad f_{n+4}^{[0]} = f(x_{n+4}, y_{n+4}^{[0]}) \\
C: &\quad y_{n+4}^{[1]} - \frac{9}{8}y_{n+3}^{[1]} + \frac{1}{8}y_{n+1}^{[1]} = \frac{3h}{8}(f_{n+4}^{[0]} + 2f_{n+3}^{[1]} + f_{n+2}^{[1]}) \\
E: &\quad f_{n+4}^{[1]} = f(x_{n+4}, y_{n+4}^{[1]})
\end{aligned}
$$

PM(EC)ME Mode:

$$
\begin{aligned}
P: &\quad y_{n+4}^{[0]} - \hat{y}_n^{[1]} = \frac{4h}{3}(2\hat{f}_{n+3}^{[1]} - \hat{f}_{n+2}^{[1]} + 2\hat{f}_{n+1}^{[1]}) \\
M: &\quad \hat{y}_{n+4}^{[0]} = y_{n+4}^{[0]} + \frac{112}{121}(y_{n+3}^{[1]} - y_{n+3}^{[0]}) \\
E: &\quad \hat{f}_{n+4}^{[0]} = f(x_{n+4}, \hat{y}_{n+4}^{[0]}) \\
C: &\quad y_{n+4}^{[1]} - \frac{9}{8}\hat{y}_{n+3}^{[1]} + \frac{1}{8}\hat{y}_{n+1}^{[1]} = \frac{3h}{8}(\hat{f}_{n+4}^{[0]} + 2\hat{f}_{n+3}^{[1]} + \hat{f}_{n+2}^{[1]}) \\
M: &\quad \hat{y}_{n+4}^{[1]} = y_{n+4}^{[1]} - \frac{9}{121}(y_{n+4}^{[1]} - y_{n+4}^{[0]}) \\
E: &\quad \hat{f}_{n+4}^{[1]} = f(x_{n+4}, \hat{y}_{n+4}^{[1]})
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: P und C sind gleich wie Beispiel 1, lösen die AWA $y' = -10(y-1)^2, y(0) = 2$ im Intervall $0 \le x \le 0.2$ mit Schrittgröße 0.01. Vergleichen Sie (1)Korrektur zur Konvergenz, (2)PECE Mode und (3)PMECME

Die theoretische Lösung ist $y(x) = 1 + 1/(1+10x)$. In der Korrektur zur Konvergenz Mode akzeptieren wir bis $|y_{n+k}^{[s+1]} - y_{n+k}^{[s]}| \le 10^{-9}$

Table 2
Errors $\times 10^5$

	Korrektur zur Konvergenz		PECE		PMECE	
x	Actual error	Estimated error	Actual error	Estimated error	Actual error	Estimated error
0.04	0.68	1.02	1.41	1.07	1.41	1.07
0.06	1.38	0.50	3.01	0.65	1.88	0.54
0.08	1.58	0.28	3.66	0.44	1.85	0.27
0.10	1.54	0.15	3.66	0.25	1.68	0.13
0.12	1.41	0.08	3.39	0.13	1.49	0.07
0.14	1.26	0.04	3.04	0.07	1.31	0.04
0.16	1.12	0.02	2.69	0.04	1.15	0.02
0.18	0.99	0.01	2.38	0.02	1.02	0.01
0.20	0.88	0.01	2.11	0.01	0.90	0.01