Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg - Mathematisches Institut
Seminar zur Funktionentheorie 1
Dozent: Dr. Rolf Busam
Referenten: Lenka Debreova & Ying Gu
Heidelberg, den 13.01.2009

Anwendungen des Residuensatzes in der reellen Analysis

Hilfssatz 1. Für alle im Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ positive stetige Funktionen $u(z)$, $v(z)$ gilt die Ungleichung: $\int_a^b u(z)v(z)\mathrm{d}z \leq \max_{z\in I} |u(z)| \int_a^b v(z)\mathrm{d}z$.

Hilfssatz 2. (Standardabschätzung für Integrale) Es sei γ ein Integrationsweg und f eine auf $\gamma([a, b])$ stetige Funktion. Dann gilt: $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|$.

(Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \to z(t) = x(t) + iy(t)$, heißt das Integral $L(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$ die Länge von γ.)

Wir betrachten **uneigentliche Integrale vom Typ**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x, \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}}$$

Satz 1. Sei g bis auf höchstens endlich viele Punkte, von denen keiner reell ist, holomorph in $\mathbb{C}$. Es sei $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_w(g(z)e^{i\alpha x}), & \text{falls } \alpha > 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{-w\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_w(g(z)e^{i\alpha x}), & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$$

wobei $\mathbb{H}$ die obere Halbebene ist.

Bemerkungen:

1. Integrale von diesem Typ heißen Fourier-Transformationen von g (als Funktionen von a).

2. Die Limesbedingung $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ des Satzes ist für jede rationale Funktion g erfüllt, deren Nennergrad größer als ihr Zählergrad ist.

3. Mit Satz 1 lassen sich auch $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$ bestimmen. Setzt man voraus, dass g reelle Werte auf $\mathbb{R}$ hat, so folgt aus dem Satz 1 wegen $\cos\alpha x = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha x}$, $\sin\alpha x = \mathrm{Im}\, e^{i\alpha x}$ sofort:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = -2\pi\,\mathrm{Im}\sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_w(g(z)e^{i\alpha z}), \quad \text{falls } \alpha > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = 2\pi\,\mathrm{Re}\sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_w(g(z)e^{i\alpha z}), \quad \text{falls } \alpha > 0$$

Entsprechend erhält man Gleichungen für den Fall $\alpha < 0$.

Beispiele:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi i e^{-2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \frac{\pi\cos 1}{e}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{xsinx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2e^a} \quad \text{mit } a>0$

Wir betrachten **uneigentliche Integrale der Form**

$$\boxed{\int_0^\infty x^{\lambda-1}R(x)\mathrm{d}x, \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \quad \lambda\notin\mathbb{Z}, \quad \lambda>0}$$

Dabei sei $R = P/Q$ eine rationale Funktion, P und Q also ganz rational. Q habe keine Nullstellen auf $\mathbb{R}_+$. Ferner sei $R(0)\neq 0$ und $\lim_{x\to\infty} x^\lambda|R(x)| = 0$ (dies ist äquivalent zu $Grad(Q) > \lambda + Grad(P)$).

Satz 2. Unter den obigen Vorraussetzungen gilt

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}R(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\sum_{a\in\mathbb{C}_+}\mathrm{Res}(f;a)$$

wobei $f(z) = (-z)^{\lambda-1}R(z)$ für $z\in\mathbb{C}_+ := \mathbb{C}-\mathbb{R}_+$.
(Hier ist $(-z)^{\lambda-1} := \exp\left((\lambda-1)\,\mathrm{Log}(-z)\right)$ mit dem Hauptwert des Logarithmus definiert. Aus $z\in\mathbb{C}_+$ folgt $-z\in\mathbb{C}_-$, die Funktion f ist also analytisch in $\mathbb{C}_+$)

Korollar. Es sei $R(x)$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der positiven reellen Achse (einschließlich des Nullpunktes) hat; der Nennergrad von $R(x)$ sei größer als der Zählergrad von $R(x)$. Dann gilt

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}R(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi e^{-\pi i\lambda}}{\sin\lambda\pi}\sum_{a\in\mathbb{C}_+}\mathrm{Res}(z^{\lambda-1}R(z);a) \tag{$*$}$$

für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $0<\lambda<1$.

Beispiele:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+e^{i\varphi}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi a}e^{i(a-1)\varphi}, \quad a\in\mathbb{R}, \quad 0<a<1, \quad -\pi<\varphi<\pi$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi a}, \quad a\in\mathbb{R}, \quad 0<a<1$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^n+e^{i\varphi}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}(\sin\frac{m}{n}\pi)^{-1}e^{i(m/n-1)\varphi}, \quad 0<m<n, \quad -\pi<\varphi<\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}(\sin\frac{m}{n}\pi)^{-1}, \quad \text{für alle } m,n\in\mathbb{N}, \quad 0<m<n$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^{2n}+2^n\cos\varphi+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}\frac{\sin(1-m/n)\varphi}{\sin\frac{m}{n}\pi\sin\varphi}, \quad 0<m<n, \quad -\pi<\varphi<\pi$

Literatur

Freitag, Busam: *Funktionentheorie 1*, 4. Auflage, Springer (2006)
Remmert: *Funkionentheorie 1*, 4. Auflage, Springer (1995)
Fischer, Lieb: *Funktionentheorie*, Vieweg (2005)